

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动你的科技女性故事

活动时间: 2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

线性代数笔记26——傅立叶级数

法国数学家傅里叶发现，任何周期函数都可以用正弦函数和余弦函数构成的无穷级数来表示（选择正弦函数与余弦函数作为基函数是因为它们是正交的），后世称傅里叶级数为一种特殊的三角级数。

构建傅立叶级数的基础

如果有一组n维空间的标准正交基向量 $q_1, q_2, \dots, q_n$ ，则n维空间内的任意向量v都可以用这组基的线性组合表示：

$$v = x_1q_1 + x_2q_2 + \dots + x_nq_n$$

正交基向量： $q_1, q_2, \dots, q_n$ 中的向量两两垂直（更多内容参考 线性代19——格拉姆-施密特正交化）。

对于标准正交向量来说，当 $i \neq j$ 时， $q_i^T q_j = 0$ ，当 $i = j$ 时， $q_i^T q_j = 1$ ，可以根据这一特性在等式两侧同时乘以 q_i^T ，从而得到每个分量的系数 x_i 的表达式：

$$\begin{aligned} q_i^T v &= x_1 q_i^T q_1 + x_2 q_i^T q_2 + \dots + x_i q_i^T q_i + \dots + x_n q_i^T q_n \\ &\Rightarrow x_i = q_i^T v \end{aligned}$$

也可以用矩阵相乘的方式表示v：

$$\begin{aligned} \text{let } Q &= [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n], \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ \text{then } v &= Qx, \quad x = Q^{-1}v \end{aligned}$$

由于Q的列是标准正交的，所以Q的逆等于Q的转置：

$$\begin{aligned} Q^{-1} &= Q^T \\ x &= Q^{-1}v = Q^T v \end{aligned}$$

上述内容的关键是Q中的向量是标准正交的，标准正交也是在构建傅里叶级数的基础。

傅立叶级数

对于任意一个周期函数f(x)，都可以使用傅里叶级数展开：

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

与之前有限个标准正交向量线性组合成的矩阵不同，这个维度是无限的，但关键的性质还是正交，正交性对sinx和cosx仍然成立，这使得傅里叶级数有意义，它的一组基是1, cosx, sinx, cos2x, sin2x...

函数的正交性

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

我们知道两个向量正交的含义, 并且可以用点积等于0判断两个向量的正交性, 这种判断方式也可以应用到函数上, 但是函数的点积是什么?

$\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 空间内的两个正交向量, 这意味着二者的点积为0:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}^T \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n = 0$$

与向量的点积展开式不同, 函数是连续的, 假设有两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, $f(x)$ 的周期是 2π , 我们希望尽可能用 $f^T g$ 的方式表示连续的累加, 使得函数点积与向量点积的概念一致。积分正是函数连续累加的概念:

$$f^T g = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

由此可以验证 $\sin x$ 和 $\cos x$ 是正交的:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = \int_0^{2\pi} \sin x d \sin x = \frac{1}{2} \sin^2 x \Big|_0^{2\pi} = 0$$

用相同的方式也可以验证 $\cos x$ 和 $\cos 2x, \sin 2x \dots$ 是正交的。

采用和标准正交向量相同的方式求得傅里叶级数的 a_1 系数:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots \\ f(x)^T \cos x &= (a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots)^T \cos x \\ \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx &= \int_0^{2\pi} (a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots) \cos x dx \\ &= 0 + \int_0^{2\pi} a_1 \cos^2 x dx + 0 + 0 + \cdots \\ &= a_1 \pi \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx$$

同理可以求得其它系数。

作者: 我是8位的

出处: <http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主, 如需转载, 请联系本人, 标明作者和出处, 非商业用途!

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: 线性代数

标签: 傅里叶级数

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程 提个issue，最速降线中 $v = \sqrt{2gh}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustinU

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288

+加关注

0
推荐

0
反对

« 上一篇: 线性代数笔记25——马尔可夫矩阵
» 下一篇: 资源下载 | 深度学习、机器学习、机器学习实战、统计学习方法、高等数学、线性代数

posted on 2019-11-19 17:30 我是8位的 阅读(1203) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

cloud.e-iceblue.cn

JAVA Office
文档在线编辑
APIs

打开

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日-3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes